



## Elementi di Geometria

Per l'Enciclopedia Treccani: “La **Geometria Descrittiva** è il settore della Geometria che studia i metodi per rappresentare su un piano gli oggetti dello spazio tridimensionale. La sua origine si deve far risalire agli studi rinascimentali sulla prospettiva, anche se la sua principale sistemazione risale alla fine del XVIII° secolo ed è dovuta al matematico francese **Gaspard Monge**. I metodi della geometria descrittiva si fondano su una serie di **operazioni caratteristiche della geometria proiettiva**: proiezioni, sezioni e ribaltamenti. I principali sono: proiezioni ortogonali, proiezioni quotate e proiezioni centrali.” Ma cosa si intende per Geometria? Per gli Egizi si trattava della risoluzione di problemi legati alla misurazione delle terre dedicate all'agricoltura (mediante l'uso di **regole pratiche per la costruzione di alcune figure più semplici**, angoli retti, triangoli ecc.), era una Geometria di carattere empirico. Mentre in epoca greca divenne una scienza razionale, dedicata allo **studio delle proprietà di figure del piano e dello spazio**. Il matematico Alessandrino **Euclide**, raccoglie gli studi di Pitagora, Talete, Eudosso di Cnido in un vero e proprio Trattato scientifico (in virtù del metodo rigorosamente deduttivo adottato), dal titolo “Elementi” o “Elementi” scritto nel IV secolo a.C. circa in 13 libri, scandagliando proprietà evidenti (assiomi) riguardanti

alcuni oggetti geometrici primitivi (**punto, retta, piano**). Con la cosiddetta **Geometria Analitica di Cartesio** del XVII° secolo si poté arrivare a trattare, grazie all'uso del **metodo cartesiano delle Coordinate**, i problemi geometrici con gli strumenti dell'algebra e del calcolo infinitesimale. Verso la metà del XIX° secolo si posero le basi della Geometria moderna, interrompendo la tradizione millenaria di identificazione della geometria con i modelli euclidei e considerandola come una scienza ipotetico-deduttiva (che può scegliere i suoi principi con una certa libertà tra quelli che vengono suggeriti, ma non imposti, dall'esperienza con il mondo circostante). Oltre alle geometrie non euclidee, nascono e si sviluppano altre importanti settori della geometria, quali, ad esempio, la **Geometria Proiettiva**, organizzata e definita da **Poncellet**, e (a questa strettamente legata) la **Geometria Descrittiva** di **Gaspari Monge**.

È importante conoscere le leggi che regolano gli Elementi geometrici per poter meglio intendere i metodi di rappresentazione grafica, di cui la Geometria Descrittiva si occupa. Discendono dal Trattato euclideo ("Elementi") cinque assiomi o postulati (da cui derivano altri teoremi non in contrasto con essi). Dapprima un'analisi della **geometria piana**, utilizzata come primo approccio alle dimostrazioni matematiche, poi lo studio della **geometria solida** in tre dimensioni. I postulati sono riferiti agli **Enti primitivi, Punto, Retta, Piano** (gli enti geometrici primitivi sono accettati come veri e sono descritti da assiomi e postulati, non esiste una definizione):

1. per **due punti** distinti **passa una retta** e una sola;
2. ogni **segmento** si può prolungare indefinitamente;
3. si può tracciare, su un dato piano, una **circonferenza di centro arbitrario** e raggio arbitrario;
4. tutti gli **angoli retti sono uguali**;
5. due rette che formino con una terza, da una stessa parte, angoli interni la cui **somma sia minore di un angolo piatto**, prolungate da quella parte si incontrano (questa proposizione – il 5° postulato – equivale alla unicità della parallela per un punto dato a una retta data).

◆ **Il Punto**. Nella geometria euclidea il **Punto** (la prima delle definizioni del I libro) è ciò che non ha parti; ente fondamentale della geometria, è **privo di una qualsiasi dimensione**, non ha grandezze di alcun tipo (volume, area, lunghezza), nessuna caratteristica tranne la sua posizione. Il punto si indica con *Tre* o più punti nello spazio sono allineati se contenuti in una retta. Quattro o più punti nello spazio si dicono complanari se contenuti in un piano. Il Punto è in relazione con gli altri enti primitivi (Retta e piano):

- ◆ Per ogni punto nel piano passano infinite rette;

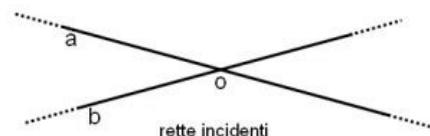
- ♦ per due punti distinti passa una e una sola retta;
- ♦ per tre punti non allineati passa un solo piano;
- ♦ per tre punti non allineati passa una sola circonferenza;
- ♦ una *linea* o una retta sono una successione infinita di punti.

Grazie alla geometria cartesiana (del piano e dello spazio euclideo) il Punto si identifica con un **insieme ordinato di coordinate**: nel piano bidimensionale avrà due Coordinate Cartesiane ( $A_x, A_y$  per esempio) nello spazio tridimensionale una terna di Coordinate Cartesiane ( $A_x, A_y, A_z$  per esempio), dove una qualsiasi lettera dell'alfabeto scritta in **maiuscolo** ( $A, B, C$ ) rappresenta un Punto e  $x, y, z$  sono le Coordinate ad esso relative (cioè dei numeri indicativi della posizione nel piano o nello spazio del Punto). ●P

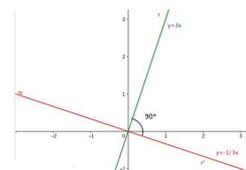
♦ *La Retta*. Nella geometria euclidea la **Retta** è uno dei tre enti geometrici fondamentali. È immateriale, **senza spessore** e con una **sola dimensione**, la lunghezza (un filo di cotone o di spago ben teso tra due punti è un modello materiale per capire cosa sia la retta).

La retta si rappresenta come un segmento con estremi tratteggiati in quanto essa è **illimitata in entrambe le direzioni**. È costituita da infiniti punti, cioè è **infinita**. Viene contrassegnata con una **lettera minuscola dell'alfabeto latino** (solitamente con la  $r$ ). Una retta può **giacere od appartenere** (cioè essere contenuta) al **piano od allo spazio** tridimensionale. Due rette nel piano possono essere:

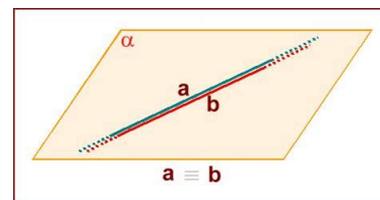
✦ **Incidenti** se hanno un unico punto in comune;



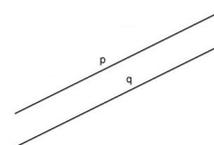
✦ **Perpendicolari** se le due rette formano nel punto d'intersezione (punto proprio) quattro angoli retti ( $90^\circ$ ), è un caso particolare di incidenza;



✦ **Coincidenti** se non si intersecano o se hanno tutti i punti in comune.



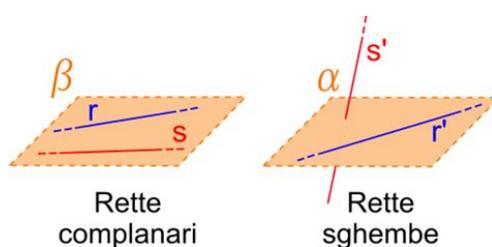
✦ **Parallele** se pur essendo sullo stesso piano non hanno nessun punto in comune e non si incontrano mai (hanno in comune un punto improprio). Nel piano mantengono sempre la **stessa distanza** tra di loro (questa caratteristica, tipica della geometria euclidea, non è verificata per esempio nella geometria iperbolica, dove due rette parallele possono divergere).



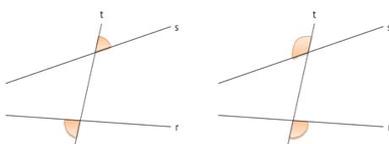
Due rette nello spazio possono essere:

♦ **Complanari** se esiste un piano che le contiene entrambe. In questo caso, risultano incidenti se si intersecano, parallele se non si incrociano;

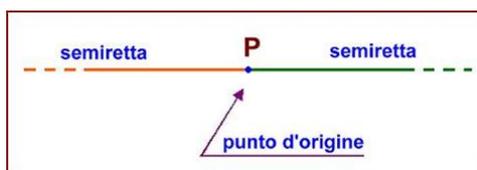
♦ **Sghembe** se non sono contenute in un piano comune, e di conseguenza non hanno punti in comune né sono parallele. Date due rette sghembe, per ognuna di esse passa un unico piano parallelo all'altra retta. La distanza tra questi due piani equivale alla distanza tra le due rette. Per due punti passa una sola retta.



Nel quinto postulato euclideo si enuncia che avendo una retta ed un punto, non appartenente ad essa, per quel punto passerà una sola retta che risulti parallela alla retta data. Una retta intersecante due rette fra loro parallele si chiama **retta trasversale**.

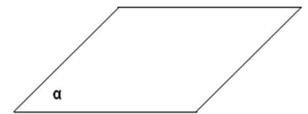


♦ La Semiretta. Dalla retta discende la **Semiretta** determinata dalla suddivisione di una retta mediante un punto. Una Semiretta è ciascuna delle due (semirette opposte, si trovano in parti opposte rispetto al punto di origine della



semiretta) parti in cui resta divisa una retta da un suo punto (ogni parte è infinita, costituita da un numero infinito di punti, in quanto pur avendo un'origine non ha una fine). Ha una sola dimensione (lunghezza). Due semirette aventi uguale origine appartengono alla stessa retta. Si indica con una lettera minuscola dell'alfabeto. Rispetto ad un piano può essere orizzontale, verticale, obliqua. Due semirette possono essere incidenti o parallele.

◆ **Il Piano.** Nella geometria euclidea il **Piano** è uno dei tre enti geometrici fondamentali (primitivi). Ha dimensioni infinite, è privo di spessore ed è costituito da infiniti punti e rette. È una **superficie piana infinita, estesa in tutte le direzioni all'infinito.** È individuato da due dimensioni (larghezza e lunghezza). Si indica con le **lettere minuscole dell'alfabeto greco** (alfa, beta, ecc.).



I postulati inerenti il Piano sono:

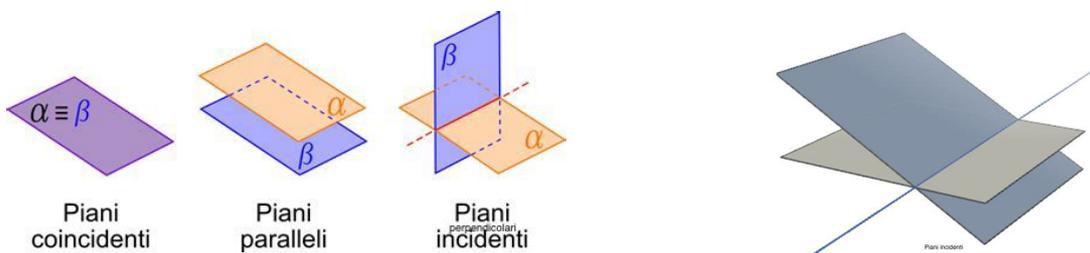
- ◆ **in tre punti non allineati** (i punti allineati sono punti che risiedono nella stessa retta, l'affermazione "una e una sola" implica i concetti di esistenza e unicità) nello spazio **passa uno e un solo piano** (postulato del passaggio della retta per due punti); è il primo postulato;
- ◆ **in due punti in un piano, la retta passante per i due punti risiede interamente sul piano.**

Il secondo postulato della retta ("in una retta ci sono almeno due punti") evita che la retta sia composta da un solo punto. Il terzo postulato della retta ("in ogni retta del piano esiste almeno un punto che non le appartiene") evita che il piano sia costituito soltanto da una retta.

piani tra loro possono essere:

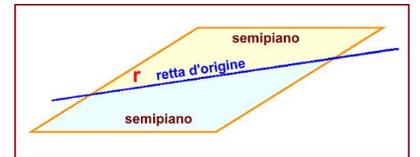
- ♦ **Paralleli**, quando non hanno nessun punto in comune; la distanza tra essi resta la medesima;
- ♦ **Coincidenti**, se sono paralleli e hanno in comune tutti i punti del piano;
- ♦ **Incidenti**, se hanno in comune gli infiniti punti della retta incidente tra i due piani. I due piani si intersecano in una Retta formando angoli acuti ( $< 90^\circ$ ) ed ottusi ( $> 90^\circ$ );
- ♦ **Perpendicolari**, quando gli angoli formati dall'incontro dei due piani sono di  $90^\circ$ ; è un caso particolare di incidenza.

Se un punto di un piano appartiene anche all'altro piano, i piani sono coincidenti.; in caso contrario sono paralleli.



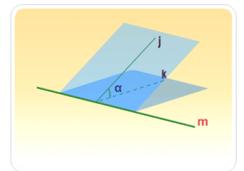
Oltre i tre Enti primitivi (Punto, Retta, Piano) vi sono altri elementi geometrici.

♦ Il Semipiano. Un **Semipiano** è costituito dalla retta che origina il semipiano e da una delle due aree in cui il piano è diviso. La retta che divide il piano è anche detta **origine del semipiano** ed essa appartiene al piano stesso. Un semipiano comprende sia i punti della retta di origine, sia i punti di una delle due aree in cui il piano è stato diviso dalla retta stessa.

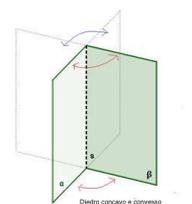


♦ Riassumendo, Semipiano è ciascuna delle due regioni in cui un piano resta diviso da una sua retta  $r$ , detta origine del semipiano. Un semipiano si dice **chiuso** se la retta origine è inclusa; **aperto** se non comprende anche la retta origine.

♦ Nello spazio due semipiani con la retta origine in comune dividono lo spazio in due **Diedri**; i due semipiani si dicono le facce, la retta è lo spigolo o costola del Diedro.

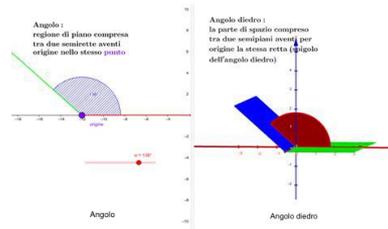


Il Diedro contenente i prolungamenti delle facce (semipiani) si dice **Diedro concavo**, il Diedro che non li comprende si chiama **Diedro convesso**.

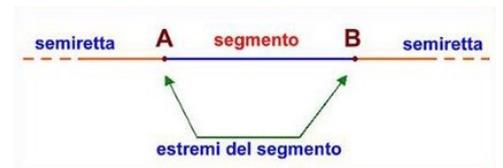


Per **Angolo** si intende la regione di Piano compresa tra due semirette

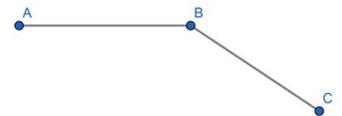
aventi origine nello stesso punto; mentre l' **Angolo Diedro** è la parte di spazio compresa tra due semipiani avente per origine la stessa Retta (spigolo dell' angolo Diedro).



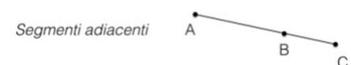
♦ Il Segmento. Per **Segmento** si intende un ente geometrico definito come **parte di una retta delimitata da due punti, detti estremi**. La parola deriva dal latino segmentum, cioè "taglio, striscia". La lunghezza del segmento è data dalla distanza tra i suoi estremi. I segmenti possono essere tra loro:



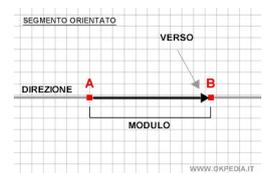
♦ **Consecutivi**, due segmenti con un estremo in comune giacenti su rette diverse;



♦ **Adiacenti**, due segmenti con un estremo in comune appartenenti alla stessa retta (da parti opposte rispetto all'estremo comune);



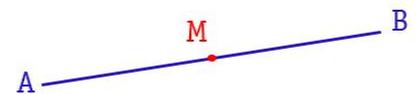
♦ **Orientati**, segmenti in cui è stato fissato un verso di percorrenza (sinonimo di vettore); hanno, inoltre, una direzione ed un modulo.



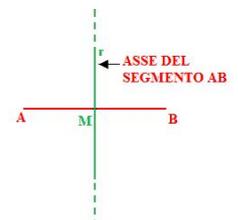
Si distingue fra **Segmento aperto**, in cui si escludono gli estremi, e **Segmento chiuso**, quando si considerano gli estremi come appartenenti al segmento stesso (in senso assoluto ci si riferisce in genere al secondo caso). Si indica con le lettere maiuscole dell'alfabeto riferite ai suoi estremi ( $AB$ ) siglate in alto da una stanghetta

Un segmento ha un **Punto medio** situato nel mezzo, posto a uguale distanza dagli estremi. Lo divide in due parti uguali. Si indica con la lettera maiuscola  $M$ .

$\overline{AB}$     $\overline{CD}$



L' **Asse** del segmento è la retta perpendicolare che passa per il suo punto medio. Forma con il segmento anche quattro angoli retti ( $90^\circ$ ). Rappresenta l'insieme dei punti che hanno la stessa distanza dai suoi estremi.



I segmenti possono combinarsi tra loro creando:

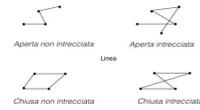
♦ **Linee spezzate aperte**, in cui gli estremi del primo e dell'ultimo segmento non si toccano (non vanno a combaciare). La linea aperta può essere intrecciata (alcuni segmenti si intersecano tra loro);

♦ **Linee chiuse**, in cui il primo e l'ultimo segmento hanno un estremo in comune.

Una **Linea poligonale** è una sequenza finita di segmenti detti lati della poligonale.

Ogni segmento è indicato con una lettera minuscola e ha in comune un estremo con il

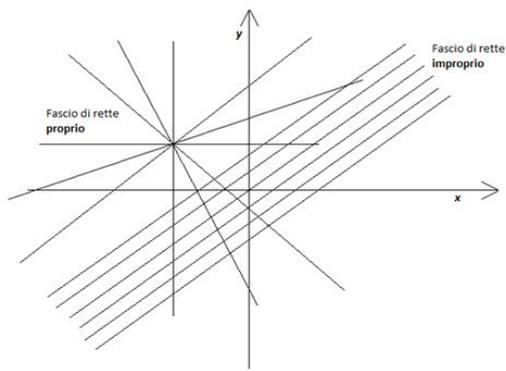
precedente.) Gli estremi dei lati della poligonale (  $A, B, C$  ) sono detti vertici e sono indicati con una le lettere maiuscole dell'alfabeto.



Durante la rinascenza l'evoluzione della geometria ha condotto ad ampliare i concetti classici di punto, retta e piano, con quelli corrispondenti di **Punto improprio**, **Retta impropria** e **Piano improprio**. Con gli studi di Poncelet relativi alla geometria proiettiva, gli enti geometrici impropri vengono considerati elementi primitivi del tutto indistinti dagli enti geometrici propri.

◆ Il Punto improprio. Per **Punto improprio** si intende il **punto all'infinito** di una retta, che determina la direzione della retta stessa. Dato che due o più rette parallele fra loro hanno la medesima direzione, ne consegue che esse hanno in comune lo stesso punto improprio; ciò significa che rette parallele fra loro si incontrano all'infinito nel loro punto improprio. Nello spazio euclideo è il punto all'infinito che identifica la direzione di un fascio di rette parallele.

◆ La Retta impropria. è detta **Retta impropria** la retta all'infinito di un piano, che determina la **giacitura** del piano stesso; due o più piani paralleli fra loro, avendo la medesima giacitura, hanno in comune la stessa retta impropria, cioè piani paralleli fra loro si incontrano all'infinito lungo la loro retta impropria. Tale retta è costituita da soli punti impropri del Piano. In geometria proiettiva i termini "direzione" e "giacitura" sono sinonimi, rispettivamente, di punto improprio e di retta impropria. La

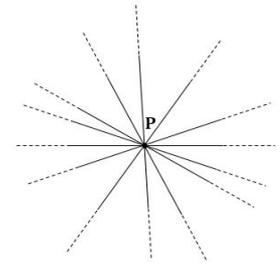


retta impropria può essere assimilata alla linea dell'orizzonte, posizionata idealmente all'infinito.

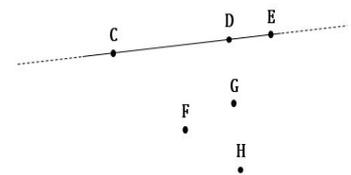
◆ Il Piano improprio. L'insieme di punto e retta impropri costituisce il **Piano improprio**. Un Piano improprio contiene ogni Retta impropria.

◆ Relazioni fra elementi fondamentali:

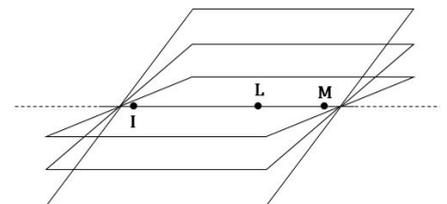
- ◆ per un punto passano infinite rette (fascio di rette);
- ◆ per due punti distinti passa una e una sola retta.



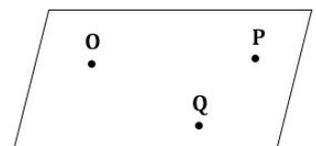
- ◆ per tre punti allineati passa una e una sola retta.
- ◆ per tre punti non allineati non passano rette.



◆ per tre punti allineati, o per una retta, passano infiniti piani (fascio di piani).



◆ per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.



Breve excursus sulle tipologie di Linee.)

La **Linea spezzata** è una linea formata da segmenti consecutivi. La **Linea curva** è una linea in cui nessuna parte di essa è un segmento di retta. La **Linea mista** è una linea formata da linee spezzate e curve.) La Linea retta è definita da una serie infinita di punti allineati secondo un'unica direzione.) Si intendono **orizzontali** tutte le linee rette che risultano parallele ad una immaginaria linea di orizzonte, è **verticale** la linea retta perpendicolare ad una linea orizzontale, mentre vengono ritenute **oblique** tutte le rette inclinate.) Anche le Linee sono indicate con una lettera minuscola dell'alfabeto latino (a, b, c, ecc.).

Per **Superficie** si intende la parte visibile di un corpo; essa può essere piana o curva a seconda della forma del corpo.